Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Maisterintutkielma

Differentiaaliyhtälöt ja niiden opetus lukiossa

Sara Parikka

Opettajankoulutus

Ohjaaja: Ilkka Holopainen 5. lokakuuta 2020

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen	Laitos - Institution - Department Opettajankoulutuslaitos	
Tekijä - Författare - Author Sara Parikka		
Työn nimi - Arbetets titel Differentiaaliyhtälöt ja niiden opetus lukiossa		
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikka		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Ilkka Holopainen	Aika - Datum - Month and year 5.10.2020	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 45 sivua + 1 liitesivu

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tämä pro-gradu -tutkielma käsittelee differentiaaliyhtälöitä sekä niiden opetusta lukion soveltavalla kurssilla. Tutkielma aloitetaan kertaamalla differentiaaliyhtälön määritelmä sekä harjoittelemalla yhtälöiden nimeämistä. Differentiaaliyhtälöihin liittyvät käsitteet kuten kertaluku, lineaarisuus ja ratkaisuparvi sekä tavallinen- ja normaalimuotoinen differentiaaliyhtälö käydään läpi. Ensimmäisessä kappaleessa tutustutaan myös differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen yleisesti sekä ratkaisun olemassaoloon ja yksikäsitteisyyteen.

Kolmannessa ja neljännessä kappaleessa syvennytään ensimmäisen sekä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälötyyppeihin sekä niiden ratkaisemiseen. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöinä tarkastellaan separoituvaa, autonomista, lineaarista ja eksaktia differentiaaliyhtälöä. Tarkastellaan myös lineaarisen differentiaaliyhtälön kahta eri tyyppiä, homogeenista ja epähomogeenista yhtälöä. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöinä tarkastellaan ensimmäiseen kertalukuun palautuvia yhtälöitä, lineaarista, vakiokertoimista sekä Eulerin differentiaaliyhtälöä.

Tämän lisäksi tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemejä ja lineearisten differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisemista sekä differentiaaliyhtälöiden sovelluksia eri luonnontieteiden alueisiin. Viimeisessä kappaleessa keskitytään differentiaaliyhtälöiden käsittelyyn lukion soveltavalla kurssilla sekä kurssin tavoitteisiin.

Avainsanat - Nyckelord Differentiaaliyhtälöt	
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Kumpulan kampuskirjasto	
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information	

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Differentiaaliyhtälöiden tutkimus alkoi 1670-luvulla, kun sekä Gottfrid Leibniz (1646-1716) että Isaac Newton (1642-1727) esittivät differentiaaliyhtälönsä.
Leibniz laati vuonna 1975 yhtälön

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2.$$

Samoihin aikoihin Newton luokitteli differentiaaliyhtälöt kolmeen eri luokkaan.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} &= u \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä yhtälöä sisältää vain tavallisia derivaattoja, joten ne ovat tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Kolmas yhtälö taas sisältää osittaisia derivaattoja joten se on osittaisdifferentiaaliyhtälö.

Vuonna 1963 sekä Newton, että Leibniz julkaisivat ratkaisut laatimiinsa yhtälöihin. Tätä vuotta pidetään differentiaaliyhtälöiden aikakauden alkuna.
Differentiaaliyhtälö on siis yhtälö, joka sisältää yhden tai useamman muuttujan funktion sekä sen derivaattoja. Derivaatat voivat olla joko tavallisia derivaattoja tai osittaisderivaattoja. Differentiaaliyhtälöllä kuvataan muutosta ja funktion derivaatalla taas muutosnopeutta tietyssä pisteessä. Esimerkiksi kuinka nopeasti

tauti leviää tai kuinka nopeasti väestönluku kasvaa. Näihin kysymyksiin voidaan vastata matemaattisella mallilla, joka sisältää usein differentiaaliyhtälöitä.

Tunnettu differentiaaliyhtälö Mekaniikan II peruslaki kertoo, että kun kappaleeseen, jonka massa on m, vaikuttaa kokonaisvoima F, niin se antaa kappaleelle kiihtyvyyden a.

$$F = ma$$

Voimme kirjoittaa kiihtyvyyden muodossa $a = \frac{dv}{dt}$ ja $a = \frac{d^2s}{dt^2}$,

jossa v on kappaleen nopeus ja s kappaleen paikka ajanhetkellä t.

Saadaan siis Mekaniikan II peruslaki muotoon

$$F(t,v) = m\frac{dv}{dt}$$
$$F(t,s) = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Luku 2

Differentiaaliyhtälöistä

Differentiaaliyhtälö on yhtälö, joka sisältää funktion $y = y(x)$ ja sen derivaatan tai derivaattoja.

Differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa joko Leibnizin merkintätavalla $\frac{dy}{dx}$ tai pilkkunotaatiolla y'. Pilkku-notaatiota käytetään ainoastaan kolmen ensimmäisen derivaatan kanssa (y', y'', y'''). Neljännen derivaatan kohdalla käytetään merkintätapaa $y^{(4)}$ merkintätavan y'''' sijaan.

Tavallinen n-kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

jossa $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio ja $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Yhtälö on normaalimuotoinen, jos se on mahdollista esittää muodossa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Esimerkiksi differentiaaliyhtälö $xy^2 + y' = 0$ on normaalimuodossa esitettynä $y' = -xy^2$.

Differentiaaliyhtälöitä voidaan luokitella monella tapaa. Tavallisessa differentiaaliyhtälössä (ODE) on vain yhden muuttujan derivaattoja, kun taas osittaisdifferentiaaliyhtälössä (PDE) esiintyy kahden tai useamman tuntemattoman muuttujan derivaattoja. Differentiaaliyhtälö voidaan luokitella myös sen lineaarisuuden mukaan. Lineaarinen differentiaaliyhtälö on yhtälö, jossa F on muuttujien $y, y', ..., y^{(n)}$

lineaarinen funktio. Epälineaarinen differentiaaliyhtälö on yksinkertaisesti yhtälö, joka ei ole lineaarinen. Differentiaaliyhtälön kertaluvun kertoo korkeimman derivaatan kertaluku. [8]

Muutama esimerkki differentiaaliyhtälöistä ja niiden nimeämisestä

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t)) \tag{1}$$

$$y' = \sin(xy) \tag{2}$$

$$y'' + 3y^2 = 0 \tag{3}$$

$$y'' + x^2y' + y = 1 \tag{3}$$

$$3u_x - 2u_y + u = x \tag{4}$$

(1) Tavallinen differentiaaliyhtälö
(2) Ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen differentiaaliyhtälö
(3) Toisen kertaluvun epälineaarinen differentiaaliyhtälö
(3) Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
(4) Ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Differentiaaliyhtälöllä voi olla monia eri ratkaisuja, ei ratkaisua ollenkaan tai ratkaisut voivat omata eri määrittelyvälit. Funktio $y = y(x)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu, jos se toteuttaa yhtälön. Tämä on eksplisiittinen ratkaisu. Aina yhtälöä ei saada ratkaistua eksplisiittisessä muodossa, vaan se voidaan joutua ratkaisemaan implisiittisessä muodossa $F(x, y) = 0$.

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu voi sisältää integroimisvakion C ja tällöin ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Yleisen ratkaisun sijaan voidaan etsiä yhtälölle erityisratkaisu, joka toteuttaa kertaluvun mukaisen määrän alkuehtoja ja tekee ratkaisusta yksikäsitteisen. Differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen vaan ratkaisuja on äärettömästi. Yhtälön $y' = \cos(x)$ yleinen ratkaisu on $y(x) = \sin(x) + C$, jossa C on integroimisvakio. Yhtälön yksi erityisratkaisu on esimerkiksi $y(x) = \sin(x)$, jossa $C = 0$. [8]

Olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Tarkastellaan tässä tavallisen differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ ratkaisun olemassaoloa sekä yksikäsitteisyyttä.

Lause 1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^2$ avoin väli ja funktiot $f : I \to \mathbb{R}$ sekä $\frac{df}{dy} \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Olkoon myös piste $(x_0, y_0) \in I$. Tällöin Picardin teoreeman mukaan on olemassa $\delta > 0$ niin, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu välillä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Lisäksi pätee $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in I_1 \cap I_2$ kun $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ sekä $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ ovat alkuarvotehtävän ratkaisuja.

Esimerkki 1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(2) = 0 \end{cases},$$

jossa $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}}$.

Funktio f on siis jatkuva, mutta osittaisderivaatta $\frac{\partial x}{\partial y}$ ei ole olemassa missään pisteessä $(x, 0)$.

Yhtälön $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ ratkaisut ovat $y(x) = x^3$ sekä $y(x) = 0$, joten yksikäsitteisyys ei päde.

Ratkaisuparvi

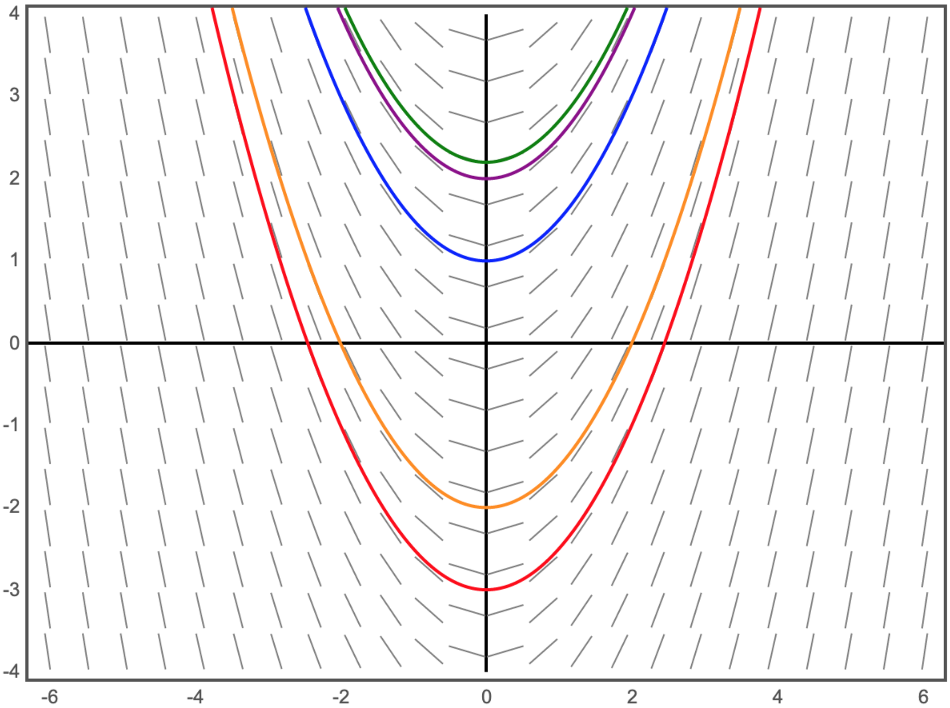
Differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen hahmottamista auttaa niiden kuvaajan piirtäminen.

Tarkastellaan taas tavallista differentiaaliyhtälöä

$$y' = f(x, y),$$

jonka yleinen ratkaisu on $y(x) = \int f(x, y)dx + C$, jossa $C \in \mathbb{R}$.

Kun yhtälön ratkaisut piirretään integroimisvakion C eri arvoilla, saadaan käyräparvi (eli monen käyrän joukko). Suunta-alkiot ovat yksittäisten ratkaisukäyrien tangentteja, jotka on piirretty lyhyillä viivoilla. Tarkastellaan esimerkiksi kuvassa 2.1 näkyvää differentiaaliyhtälön $y' = x$ käyräparvea sekä suunta-alkioita. Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ ja kuvaan 2.1 on nyt piirretty yhtälön ratkaisuparvi eri C:n arvoilla. [5]



Kuva 2.1: Kuvaajan $y' = x$ käyräparvi sekä suunta-alkiot piirrettynä koordinaatistoon

Luku 3

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustutaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin sekä niiden ratkaisemiseen. Edes ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöille ei ole olemassa yleistä ratkaisumenetelmää. On kuitenkin olemassa useita tapoja, joita voidaan soveltaa erilaisiin ensimmäisen kertalukujen yhtälöihin. Näistä tärkeimmät ovat lineaariset differentiaaliyhtälöt sekä separoituvat differentiaaliyhtälöt.

Ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' = f(x, y),$$

jossa f on tunnettu kahden muuttujan jatkuva funktio.

Separoituva differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälö on separoituva, jos se on muotoa

$$y' = f(x)g(y),$$

jossa $f(x)$ ja $g(x)$ ovat jatkuvia funktioita.

Yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \text{jossa } g(y) \neq 0 \text{ kaikkialle } y.$$

Tätä kutsutaan yhtälön separoinniksi.

Integroidaan puolittain

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Esimerkki 1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = e^y \sin(x)$

$$\frac{dy(x)}{dx} = e^y(\sin(x))$$

Jaetaan puolittain termillä e^y

$$e^{-y}\frac{dy(x)}{dx} = \sin(x)$$

Integroidaan puolittain

$$\int e^{-y}dy = \int \sin(x)dx$$

$$-e^{-y} = -\cos(x) + C$$

Ratkaistaan $y(x)$ yhtälöstä

$$y(x) = -\log(\cos(x) + C)$$

Autonominen differentiaaliyhtälö

Separoituva differentiaaliyhtälö on autonominen, jos se on muotoa

$$y' = f(y).$$

Autonominen differentiaaliyhtälö ei siis eksplisiittisesti riipu muuttujasta x, vaan muuttuja x esiintyy ainoastaan funktion y argumenttina.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö $y' = y(2-y)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y(2-y)\\ dx &= \frac{dy}{y(2-y)}\end{aligned}$$

Integroidaan puolittain

$$\begin{aligned}\int dx &= \int \frac{dy}{y(2-y)}\\ x &= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y} - \frac{1}{2-y})dy\\ &= \frac{1}{2}(\log|y| - \log|2-y| + C)\\ &= \frac{1}{2}(\log|\frac{y}{2-y}| + C)\end{aligned}$$

Ratkaistaan vielä y yhtälöstä

$$\begin{aligned}e^{2x} &= (\frac{y}{2-y} + e^{C})\\ e^{2x-C} &= \frac{y}{2-y}\\ y &= e^{2x-C}(2-y)\\ &= \frac{2e^{2x-C}}{1+e^{2x}}\end{aligned}$$

Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{1}$$

kun $a(x)$ ja $f(x)$ ovat jatkuvia funktioita.

Yhtälö (1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$Ly = f(x),$$

jossa kuvaus $y \to Ly$ on lineaarinen differentiaalioperaattori.

Yhtälö on siis lineearinen, kun pätee

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2,$$

jossa $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Esimerkki 3. Löydä differentiaaliyhtälön $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ lineaarinen operaattori

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(y)) + \frac{d}{dx}(y) - 2y &= 0 \\
D^2y + Dy - 2y &= 0 \\
(D^2 + D - 2)y &= 0
\end{aligned}$$

Lineaarinen operaattori on siis $L = D^2 + D - 2$, jossa $D = \frac{d}{dx}$.

Homogeeninen differentiaaliyhtälö

Jos yhtälön (1) termi $f(x) = 0$, on yhtälö homogeeninen ja saa tällöin muodon

$$y' + a(x)y = 0.$$

Homogeeninen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on separoituvaa muotoa ja sille saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$y(x) = Ce^{-\mu(x)},$$

jossa $C \in \mathbb{R}$ ja $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$ integroiva tekijä.

Esimerkki 4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3y = 0$ alkuarvolla $y(0) = 4$

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Huomataan, että kyseessä on separoituva yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -3y \\ \frac{dy}{y} &= -3dx \end{aligned}$$

Koska tehtävässä on annettu alkuarvo, voidaan integroida määrätyllä integraalilla

$$\begin{aligned} \int_4^y \frac{dt}{t} &= \int_0^x -3dt \\ \log(y) - \log(4) &= -3x \\ \log(\frac{y}{4}) &= -3x \end{aligned}$$

Ratkaistaan vielä y yhtälöstä ja saadaan erityisratkaisu

$$y = 4e^{-3x}$$

Kun lineearisen ensimmäisen kertaluvun yhtälön yksi erityisratkaisu $y_0(x)$ sekä homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu tunnetaan, saadaan selville yhtälön yleinen ratkaisu. Yhtälön (1) yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = y_0(x) + Ce^{-\int a(x)dx},$$

jossa $Ce^{-\int a(x)dx}$ on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja $C \in \mathbb{R}$.

Epähomogeeninen differentiaaliyhtälö

Jos yhtälön (1) termi $f(x) \neq 0$, on yhtälö epähomogeeninen ja saa tällöin muodon

$$y' + a(x)y = f(x).$$

Jos taas $a(x) = 0$, yhtälö voidaan esittää helposti ratkaistavassa muodossa

$$y' = f(x).$$

Integroimalla puolittain saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Esimerkki 5. Ratkaise yhtälö $y' = 5\cos(x)$

Integroidaan puolittain

$$\begin{aligned} y &= \int 5\cos(x)dx \\ y &= 5\sin(x) + C \end{aligned}$$

Kun $a(x) \neq 0$ ja vakio, niin lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista integroivan tekijän $\mu(x)$ avulla. Integroitava tekijä toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx} &= a\mu \\ \mu(x) &= e^{ax} \end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälö (1) puolittain integroivalla tekijällä

$$\begin{aligned} e^{ax}\frac{dy}{dx} + e^{ax}a(x)y &= e^{ax}f(x) \\ \frac{d}{dx}(e^{ax}y) &= e^{ax}f(x) \end{aligned}$$

Integroidaan puolittain

$$e^{ax}y = \int e^{ax}f(x)dx + C$$

ja ratkaistaan y jakamalla yhtälö puolittain integroivalla tekijällä, jolloin saadaan ensimmäisen kertaluvun lineaarisen epähomogeenisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

$$y = e^{-ax}\left(\int e^{ax}f(x)dx + C\right)$$

Esimerkki 6. Ratkaise yhtälö $y' + 2y = 1$

Integroitava tekijä tässä tilanteessa on $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. Kerrotaan yhtälö puolittain integroivalla tekijällä sekä integroidaan.

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= 1 \\
e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= e^{2x} \\
\frac{d}{dx}(ye^{2x}) &= e^{2x} \\
ye^{2x} &= \int e^{2x}dx \\
ye^{2x} &= \frac{1}{2}e^{2x} + C \\
y &= \frac{1}{2} + Ce^{-2x}
\end{aligned}$$

Esimerkki 7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

Integroitava tekijä on $\mu = e^{\int 3x^2} = e^{x^3}$. Kerrotaan yhtälö puolittain integroivalla tekijällä sekä integroidaan.

$$
\begin{aligned}
e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y &= 6x^2e^{x^3}\\
\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) &= 6x^2e^{x^3}\\
e^{x^3}y &= \int 6x^2e^{x^3}dx\\
e^{x^3}y &= 2e^{x^3} + C\\
y &= 2 + Ce^{-x^3}
\end{aligned}
$$

Eksakti differentiaaliyhtälö

Olkoon funktiot $P(x,y)$ sekä $Q(x,y)$ jatkuvia ja olkoon näiden funktioiden osittaisderivaatatkin jatkuvia. Tällöin yhtälö

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

on eksakti differentiaaliyhtälö jos on olemassa jatkuvasti differentioituva funktio f, niin että

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad ja \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Lause 2. Yhtälö on eksakti tarkalleen silloin, kun

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \text{kaikkialla}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Eksakti differentiaaliyhtälö (2) voidaan ratkaista integroimalla funktio $P(x,y)$ muuttujan x suhteen

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y),$$

jolloin $f(y)$ saadaan määritettyä ehdosta $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$, jonka jälkeen differentiaaliyhtälö saa yleisen ratkaisun $F(x,y) = C$

Esimerkki 8. Ratkaise yhtälö $2xy + (x^2 - 1)y' = 0$

$$\text{Nyt } P(x,y) = 2xy \quad \text{ja} \quad Q(x,y) = x^2 - 1.$$

Tarkistetaan ensin onko yhtälö eksakti.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad \text{ja} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$$

joten yhtälö on eksakti jossa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Integroidaan ensimmäinen yhtälö x suhteen

$$f(x,y) = \int 2xy\; dx + g(y) = x^2y + g(y)$$

Sijoitetaan toiseen yhtälöön

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + g(y)) = x^2 - 1 \\
x^2 + g'(y) &= x^2 - 1 \\
g'(y) &= -1 \to g(y) = -y,
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$x^2y - y = C$$

Ratkaistaan y yhtälöstä

$$y = \frac{C}{X^2 - 1}, \quad \text{jolloin} \quad y' = -\frac{2Cx}{(x^2-1)^2}$$

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön

$$2xy + (x^2 - 1)y = \frac{2Cx}{x^2 - 1} - (x^2 - 1)\frac{2Cx}{(x^2-1)^2} = 0$$

Luku 4

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustutaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin ja muutaman erilaisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisumenetelmään.

Toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + y' = f(x, y),$$

jossa $f(x, y)$ on jatkuva funktio.

Ensimmäiseen kertalukuun palautuva yhtälö

Osa toisen ja korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöistä voidaan palauttaa ensimmäiseen kertalukuun ratkaisemisen helpottamiseksi.

Muotoa $y'' = f(x, y')$ olevat differentiaaliyhtälöt

Muotoa $y'' = f(x, y')$ olevat yhtälöt voidaan palauttaa ensimmäiseen kertalukuun merkitsemällä $z(x) = y'(x)$. Tällöin $z'(x) = y''(x)$, jonka avulla pystytään muodostamaan ensimmäisen kertaluvun yhtälö $z' = f(x, y)$.

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $(x - 2)y'' - (4x - 7)y' = 0, \quad x > 2$

Merkitään $z(x) = y'(x)$ sekä $z'(x) = y''(x)$, jolloin saamme yhtälön

$$
\begin{aligned}
(x-2)z' - (4x-7)z &= 0 \\
(x-2)\frac{dz}{dx} &= (4x-7)z(x)
\end{aligned}
$$

Jaetaan yhtälö puolittain termeillä $x-2$ ja $z(x)$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{z(x)} = \frac{4x-7}{x-2}$$

Integroidaan puolittain

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z(x)} &= \int \frac{4x-7}{x-2} dx \\
\log(z(x)) &= \int \frac{1}{x-2} + 4\ dx \\
\log(z(x)) &= \log(x-2) + 4x + C
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan $z(x)$

$$z(x) = C_1 e^{4x}(x-2)$$

Muuttujan takaisinvaihto $z(x) \rightarrow y(x)$

$$y(x) = \int C_1 e^{4x}(x-2) dx$$

$$y(x) = \frac{1}{16} C_1 e^{4x}(4x-9) + C_2$$

Muotoa $y'' = f(y, y')$ olevat differentiaaliyhtälöt

Myös muotoa $y'' = f(y, y')$ tai $y'' = f(y)$ olevat differentiaaliyhtälöt voidaan palauttaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi.

Kirjoitetaan $y'(x)$ muotoon $y'(x) = u(y(x))$, jolloin

$$y''(x) = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u'(y)y'(x) = u'(y)u(y).$$

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön

$$y'' = u'(y)u(y) = f(y, u'(y)).$$

Ratkaistaan muuttuja $u'(y)$

$$u'(y) = \frac{f(y, u'(y))}{u(y)}.$$

Saadaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $u'(y)$, joka voidaan ratkaista.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö $y'' = (y')^3y^2$

Kirjoitetaan $y'(x)$ muotoon $y'(x) = u(y(x))$ ja sijoitetaan yhtälöön

$$\begin{aligned} y'' = u(y)u'(y) &= u(y)^3y^2 \\ u'(y) &= u(y)^2y^2 \end{aligned}$$

Saadaan ensimmäisen kertaluvun separoituva yhtälö, joka voidaan ratkaista integroimalla

$$\begin{aligned} \frac{\frac{du}{dy}}{u(y)^2} &= y^2 \\ \int \frac{du}{u(y)^2} &= \int y^2 dy \\ -\frac{1}{u(y)} &= \frac{1}{3}y^3 + C_1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan $u(y)$

$$u(y) = -\frac{3}{y^3 + C_1}$$

Sijoitetaan takaisin $y'(x) = u(y)$

$$y'(x) = -\frac{3}{y^3 + C_1}$$

Muutetaan yhtälö separoitavaan muotoon ja integroidaan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{y^3 + C_1}$$
$$\int (y^3 + C_1)dy = -\int 3dx$$

Saadaan ratkaisuksi

$$\frac{1}{4}y^4 + C_1 y = -3x + C_2$$

Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + p(x)y' + r(x)y = q(x), \tag{3}$$

kun $p(x)$, $r(x)$ ja $q(x)$ ovat jatkuvia funktioita. Niin kuin ensimmäisenkin kertaluvun tapauksessa, yhtälö on homogeeninen jos $q(x) = 0$ ja vakiokertoiminen jos $p(x)$ sekä $r(x)$ ovat vakiofunktioita.

Yhtälö 3 voidaan, kuten ensimmäisenkin kertaluvun tapauksessa, kirjoittaa muotoon

$$Ly = q(x),$$

jossa L on lineaarinen operaattori. Yhtälö on siis lineearinen, kun pätee

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2,$$

jossa $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Jos toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on homogeenininen, niin olkoon y_1, y_2 sen ratkaisut. Tällöin kyseisen yhtälön ratkaisu on myös

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

jossa $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Vakiokertoiminen yhtälö

Vakiokertoiminen homogeeninen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4}$$

jossa a, b ja c ovat annettuja vakioita.

Merkitään $y = e^{rt}$, jossa r on määritettävä vakio.

Tästä seuraa $y' = re^{rt}$ sekä $y'' = r^2e^{rt}$.

Sijoitetaan muuttujat y, y' ja y'' alkuperäiseen yhtälöön ja otetaan termi e^{rt} yhteiseksi tekijäksi

$$(ar^2 + br + c)e^{rt}.$$

Tätä yhtälöä voidaan kutsua yhtälön (4) karakteristiseksi yhtälöksi.

Karakteristinen yhtälö voidaan nyt ratkaista 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1^{r_1 x} + C_2^{r_2 x}$, jossa r_1 sekä r_2 ovat karakteristisen yhtälön reaaliset juuret ja C_1 sekä C_2 integroimisvakiot.

Esimerkki 3. Ratkaise yhtölö $y'' + 5y' - 6y = 0$

Differentiaaliyhtälöa vastaava karakteristinen yhtälö on $r^2 + 5r - 6 = 0$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

Yhtälön juuret ovat

$$r_1 = -6 \quad ja \quad r_2 = 1.$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = C_1 e^{-6x} + C_2 e^x$$

Tämä tapa toimii vain toisen asteen yhtälöille, joilla on kaksi erisuurta juurta. Yhden juuren ja kompleksisien juurten tapauksissa yleinen ratkaisu on eri muotoa.

Yhden juuren tapauksessa yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx},$$

jossa karakteristisen yhtälön yksittäisjuuri on $x = r$

Kun karakteristisen yhtälön determinantti on negatiivinen, tulokseksi saadaan kompleksiset juuret. Kompleksijuurten tapauksessa yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{(A+Bi)x} + C_2 e^{(A-Bi)x},$$

jossa karakteristisen yhtälön kompleksiset juuret ovat $x = A \pm Bi$.

Eulerin kaavalla $e^x = \cos(x) + \sin(x)$ ratkaisu on mahdollista saada vielä sievempään muotoon

$$y(x) = e^{Ax}(C_1 \cos(Bx) + iC_2 \sin(Bx)).$$

Eulerin differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälö

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

on nimeltään Eulerin differentiaaliyhtälö, jossa $a, b \in \mathbb{R}$.

Perusmuodossa esitettynä

$$y'' + ax^{-1}y' + bx^{-2}y = 0,$$

jossa $x \neq 0$

Homogeeninen Eulerin yhtälö voidaan ratkaista yritteellä $y(x) = x^r$, jossa $r \in \mathbb{R}$. Tästä saadaan $y'(x) = rx^{r-1}$ ja $y''(x) = (r-1)rx^{r-2}$. Sijoitetaan $y(x)$ ja sen derivaatat Eulerin differentiaaliyhtälöön

$$\begin{aligned} x^2(r-1)rx^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r &= 0 \\ x^r(r-1)r + ax^r r + bx^r &= 0 \end{aligned}$$

Otetaan x^r yhteiseksi tekijäksi

$$x^r(r(r-1) + ar + b) = 0$$

Koska $x \neq 0$, niin yhtälö pätee kun

$$\begin{aligned} r(r-1) + ar + b &= 0 \\ r^2 + (a-1)r + b &= 0 \end{aligned}$$

Huomataan, että kyseessä on toisen asteen yhtälö, josta saadaan ratkaistua juuret r_1 ja r_2.

Yhtälön yleiseksi ratkaisuksi saadaan $y(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}$, jossa $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 4. Ratkaise yhtälö $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$, kun $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö yritteellä $y(x) = x^r$

$$\begin{aligned} x^2(r-1)rx^{r-2} + 4xrx^{r-1} + 2x^r &= 0 \\ x^r(r-1)r + x^r4r + 2x^r &= 0 \end{aligned}$$

Otetaan x^r yhteiseksi tekijäksi

$$x^r((r-1)r + 4r + 2) = 0$$

Koska $x \neq 0$, niin yhtälö pätee kun

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Saadaan juuret $r_1 = -1$ ja $r_2 = -2$, joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1x^{-1} + C_2x^{-2}$$

[7] [5]

Luku 5

Differentiaaliyhtälösysteemit

Differentiaaliyhtälösysteemiä tarvitaan, jos tuntemattomia funktioita on kaksi tai enemmän. Tässä luvussa käsitellään differentiaaliyhtälösysteemejä yleisesti sekä tarkastellaan niiden ratkaisutapoja. [7]
Lotka-Volterran yhtälö on esimerkki differentiaaliyhtälösysteemistä. Se kuvaa kahden eläinpopulaation välistä riippuvuutta.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y,$$

jossa muuttuja x kuvaa saaliiden ja y saalistajien lukumäärää sekä t aikaa. Muut yhtälön osat, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ovat vakioita, jotka riippuvat populaation yksityiskohdista.

Normaalimuotoinen tavallinen differentiaaliyhtälösysteemi on muotoa

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$.

Systeemin yleinen ratkaisu on $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))$. [4]

Normaalimuotoinen n-kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan muuntaa normaalimuotoiseksi differentiaaliyhtälösysteemiksi.

Merkitään $y_1 = y$, $y_2 = y'$, ..., $y_n = y^{n-1}$, jolloin yhtälö saa muodon

$$\begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = y_3 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' & = y_n y_n' \quad = f(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

Muutetaan nyt toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö $y'' + p(x)y' + r(x)y = q(x)$ differentiaaliyhtälösysteemiksi.

Merkitään $y_1(x) = y(x)$ ja $y_2(x) = y'(x)$ ja muunnetaan systeemiksi

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = -p(x)y_2(x) - r(x)y_1(x) + q(x) \end{cases}$$

Lineaarinen differentiaaliyhtälösysteemi

Differentiaaliyhtälösysteemi on lineaarinen, jos se voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{m1}(x)y_1 + ... + a_{mn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

jossa a_{mn} sekä f_n ovat jatkuvia funktioita.

Differentiaaliyhtälösysteemi voidaan myös esittää matriisimuodossa. Esitetään edellinen lineaarinen epähomogeeninen systeemi nyt matriisimuodossa

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 1 & \cdots & a_1 n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_m 1 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

joka taas vektorimuodossa on $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$.

Vektorifunktio $\bar{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$, joka toteuttaa systeemin, on differentiaalisytseemin ratkaisu.

Systeemi on homogeeninen kun $f_n = 0$ ja epähomogeeninen muissa tapauksissa.

Homogeenisen systeemin vektorimuoto on $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$.

Differentiaaliyhtälön vektorimuoto voidaan kirjoittaa muotoon

$$L\bar{y} = \bar{y}' - A(x)\bar{y},$$

jossa L on lineaarinen operaattori. Systeemi on siis lineaarinen kun pätee

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Lx_1 + C_2Lx_2.$$

Esimerkki 1. Muuta differentiaaliyhtälösysteemi matriisimuotoon

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases}$$

Systeemin matriisimuoto on

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälösysteemin ratkaiseminen

Käsittelemme tässä luvussa vain lineearisten homogeenisten differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisemista. Differentiaaliyhtälösysteemien yleisimmät ratkaisumenetelmät ovat eliminointimenetelmä sekä ratkaisu ominaisarvon ja ominaisvektorin avulla.

Eliminointimenetelmä

Tarkastellaan lineaarista toisen asteen differentiaaliyhtälösysteemiä

$$\begin{cases} y_1' = a_1y_1 + a_2y_2 \\ y_2' = b_1y_1 + b_2y_2, \end{cases}$$

jossa $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

Derivoidaan ensimmäinen yhtälö ja sijoitetaan siihen alempi yhtälö

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_1y_1' + a_2y_2' = a_1y_1' + a_2(b_1y_1 + b_2y_2) \\ y_1'' &= a_1y_1' + a_2b_1y_1 + a_2b_2y_2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä a_2y_2 ja sijoitetaan se yhtälöön

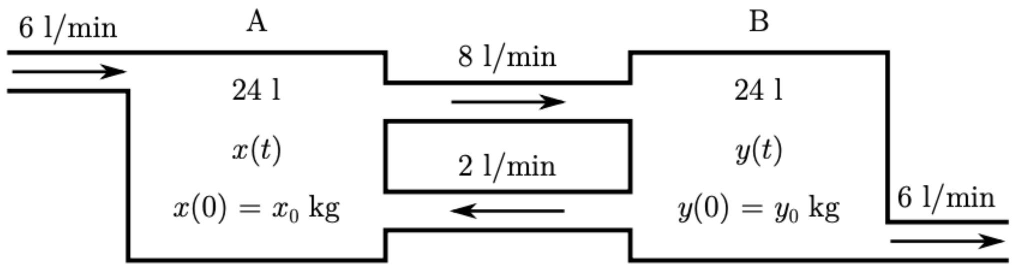
$$y_1'' = a_1y_1' + a_2b_1y_1 + b_2(y_1' - a_1y_1)$$

Saadaan toisen asteen lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} y_1'' - a_1y_1' - a_2b_1y_1 - b_2y_1' + b_2a_1y_1 = 0 \\ y_1'' - (a_1 + b_2)y_1' + (a_1b_2 - a_2b_1)y_1 = 0 \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista karakteristisenä yhtälönä, josta saadaa yleinen ratkaisu y_1:lle. Kun tämä sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön saaadaan ratkaistua myös yleinen ratkaisu y_2:lle.

Esimerkki 2. Tarkastellaan nyt kahden säiliön sekoitusongelmaa. Alla olevassa kuvassa 6.1 on esitetty kaksi säiliötä A ja B, joiden välillä kulkee suolaliuosta nuolten osoittamissa virtaussuunnissa. Suolan määrät ajan t funktiona ovat $x(t)$ sekä $y(t)$ ja säiliöön A virtaavan suolaliuoksen suolapitoisuus on a.



Kuva 5.1: Säiliöt A ja B sekä niiden välinen virtaus

Tällöin funktioiden $x(t)$ ja $y(t)$ muutos on

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6a - 8 \cdot \frac{x(t)}{24} + 2 \cdot \frac{y(t)}{24} \\ y'(x) &= 8 \cdot \frac{x(t)}{24} - 2 \cdot \frac{y(t)}{24} - 6 \cdot \frac{y(t)}{24}, \end{aligned}$$

josta saadaan lineaarinen differentiaaliyhtälösysteemi

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{1}{3}x(t) + \dfrac{1}{12}y(t) + 6a \\ y'(t) = \dfrac{1}{3}x(t) - \dfrac{1}{3}y(t) \end{cases}$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälösysteemi eliminoinnilla. Derivoidaan systeemin ensimmäinen yhtälö ja sijoitetaan siihen alempi yhtälö.

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{1}{3}x'(t) + \frac{1}{12}y'(t) = -\frac{1}{3}x'(t) + \frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}y(t)) \\ x''(t) &= -\frac{1}{3}x'(t) + \frac{1}{36}x(t) - \frac{1}{36}y(t) \end{aligned}$$

Sijoitetaan vielä yhtälöön ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistu y ja saadaan

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{1}{3}x'(t) + \frac{1}{36}x(t) - \frac{1}{36} \cdot (12x'(t) + 4x - 72a) \\ x''(t) &= -\frac{2}{3}x'(t) - \frac{1}{12} + 25, \end{aligned}$$

josta edelleen

$$12x''(t) + 8x'(t) + x(t) = 24a.$$

Kyseessä on lineaarinen toisen kertaluvun vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö. Ratkaistaan ensin karakteristisen yhtälön $12r^2 + 8r + 1 = 0$ juuret.

Karakterisen yhtälön juuret saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta ja ne ovat $r_1 = -\frac{1}{2}$ ja $r_2 = -\frac{1}{6}$.

Tällöin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = 24a + C_1 e^{-\frac{t}{2}} + C_2 e^{-\frac{t}{6}},$$

jossa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nyt kun derivoidaan saatu ratkaisu $x(t)$ voidaan sen avulla ratkaista $y(t)$.

$$x'(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{C_2}{6}e^{-\frac{t}{6}}$$

Funktion $y(t)$ ratkaisu saadaan sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön 2 saatu $x'(t)$.

$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{C_2}{6}e^{-\frac{t}{6}} &= -\frac{1}{3}x(t) + \frac{1}{12}y(t) + 6a \\ y(t) &= 4a - 2C_1e^{-\frac{t}{2}} + 2C_2e^{-\frac{t}{6}} \end{aligned}$$

Systeemin ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x(t) = 24a + C_1e^{-\frac{t}{2}} + C_2e^{-\frac{t}{6}} \\ y(t) = 4a - 2C_1e^{-\frac{t}{2}} + 2C_2e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}$$

Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Lineaariset differentiaaliyhtälösysteemit voidaan usein ratkaista matriisin ominaisarvojen ja ominaisvektorien avulla. Kerrataan ensin nämä käsitteet lyhyesti.

Tarkastellaan vektoria $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, jossa A on $n \times n$-matriisi ja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Kun λ on matriisin A ominaisarvo, täytyy päteä

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} = \lambda I\bar{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0.$$

Tällöin yhtälöllä on ratkaisu kun $det(A - \lambda I) = 0$.

Tarkastellaan $n \times n$-neliömatriisia A. Tällöin matriisin ominaisarvo on λ kun pätee

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Esimerkki 3. Ratkaise matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (-2-\lambda)(2-\lambda) + 5 = 0 \\ \lambda^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = 3$.

Etsitään nyt ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Ratkaistaan ensin ominaisarvoa λ_1 vastaava vektori sijoittamalla λ:n tilalle $\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0,$$

josta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_{11} + 5x_{12} = 0 \\ x_{11} + 5x_{12} = 0 \end{cases}$$

Saadaan $x_{11} = -5x_{12}$, josta saadaan vastaavaksi ominaisvektoriksi

$$V_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

.

Lasketaan samalla lailla ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori.

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0,$$

josta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -5x_{21} + 5x_{22} = 0 \\ \qquad x_{21} + x_{22} = 0 \end{cases}$$

Saadaan $x_{21} = x_{22}$, josta saadaan vastaavaksi ominaisvektoriksi

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit ovat siis $\lambda_1 = 3, V_1 = (-5, 1)^T$ sekä $\lambda_2 = -3, V_2 = (1, 1)^T$.

Systeemien ratkaiseminen ominaisarvoilla ja vektoreilla

Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä $\bar{y}' = A\bar{y}$, jossa A on $n \times n$-matriisi. Kun matriisilla on lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $V_1, V_2, ..., V_n$, sillä on yleinen ratkaisu

$$y(x) = C_1V_1e^{\lambda_1 x} + C_2V_2e^{\lambda_2 x}+, ..., C_nV_ne^{\lambda_n x},$$

jossa $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ ja λ_i on matriisin ominaisarvo.

Esimerkki 4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = -5x + y - 4z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$$

Lasketaan matriisin A ominaisarvot sekä ominaisvektorit

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -5 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(4-\lambda)-8]+5[2(4-\lambda)-6] &= 0 \\ (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-4)+5(-2\lambda+2) &= 0 \\ \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda^2-5+6) &= 0 \end{aligned}$$

Saadaan ratkaisuksi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

Ratkaistaan ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 2 & -3 \\ -5 & 1-1 & -4 \\ 0 & -2 & 4-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 0$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_{12} - 3x_{12} = 0 \\ -5x_{11} - 4x_{13} = 0 \\ -2x_{12} + 3x_{13} = 0 \end{cases},$$

joka saadaan supistettua alla olevaan muotoon sijoittamalla $x_{13} = t$

$$\begin{cases} 2x_{12} = 3t \\ 5x_{11} = -4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = \dfrac{3}{2}t \\ x_{11} = -\dfrac{4}{5}t \end{cases}$$

Ensimmäistä ominaisarvoa vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan siis

$$V_1 = t \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -8 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 & -3 \\ -5 & 1-2 & -4 \\ 0 & -2 & 4-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 0$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x_{21} + 2x_{22} - 3x_{23} = 0 \\ -5x_{21} - x_{22} - 4x_{23} = 0 \\ \quad -2x_{22} + 2x_{23} = 0 \end{cases},$$

joka saadaan supistettua alla olevaan muotoon sijoittamalla $x_{22} = x_{23} = t$

$$x_{21} = 2x_{22} - 3x_{23} = 2t - 3t = t$$

Toista ominaisarvoa vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan siis

$$V_2 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan ominaisarvoa λ_3 vastaava ominaisvektori

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 & -3 \\ -5 & 1-3 & -4 \\ 0 & -2 & 4-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -5 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 0$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -2x_{31} + 2x_{32} - 3x_{33} = 0 \\ -5x_{31} - 2x_{32} - 4x_{33} = 0 \\ \qquad\quad -2x_{32} + x_{33} = 0 \end{cases}.$$

Viimeiseen yhtälöön sijoittamalla $x_{33} = t$ saadaan

$$2x_{32} = -x_{33} = -t$$

Sijoitetaan nyt ensimmäiseen yhtälöön x_{32} ja x_{33}

$$-x_{31} = -2x_{32} + 3x_{33} = -2 \cdot -\tfrac{1}{2}t + 3t = 4t$$

eli $x_{31} = -2t$

Kolmatta ominaisarvoa vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan

$$V_3 = t \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(t) = C_1 e^{1t} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

jossa $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

Luku 6

Differentiaaliyhtälöiden sovelluksia

Tässä kappaleessa tarkastellaan lähemmin differentiaaliyhtälöiden sovellusmahdollisuuksia eri luonnontieteissä. Differentiaaliyhtälöitä käytetään paljon niin matematiikassa, kemiassa, biologiassa kuin fysiikassakin. Monet fysiikan ja kemian peruslait voidaan esittää differentiaaliyhtälöinä.

Systeeminen matemaattinen tarkastelu:

1. Muodostetaan systeemiä kuvaava matemaattinen malli
2. Löydetään mallille yleinen ratkaisu sekä yksityisratkaisu alkuehtojen avulla
3. Tutkitaan ratkaisua ja tehdään siitä päätelmiä

Alla olevassa taulukossa (6.1) on lueteltu differentiaaliyhtälöiden yleisempiä sovellusmahdollisuuksia esimerkkeinä.

Taulukko 6.1: Differentiaaliyhtälöiden sovelluksia

Sovelluksia	
Kemia	Kemiallinen reaktio Entropia Newtonin jäähtymislaki Liuokset Maxwellin relaatiot
Fysiikka	Schrödingenin yhtälö Atomifysiikka Virtapiirit Objektin putoaminen
Matematiikka	Populaation kasvu Radioaktiivinen hajoaminen Korkoyhtälöt Geometria

Eksponentiaalinen kasvu

Eksponentiaalisella kasvulla tarkoitetaan funktion kasvua, joka on suoraan verrannollinen funktion arvoon. Olkoon $y(t)$ funktio, joka kuvaa muuttujan y arvoa ajanhetkellä t, tällöin

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Tätä yhtälöä kutsutaan eksponentiaalisen hajoamisen yhtälöksi, jossa k on verrannollisuuskerroin.

Esimerkki 1. Tarkastellaan soluviljelmää, joka kasvaa nopeudella v, joka on verrannollinen solujen määrään. Jos soluviljelmässä on aluksi 500 solua ja 800 solua 24 tunnin jälkeen, niin mikä on solujen määrä seuraavan 24 tunnin jälkeen?

Olkoon $y(t)$ soluviljelmän solujen määrä t tunnin jälkeen, jolloin $y(0) = 500, y(24) = 800$.

Koska $\frac{dy}{dt} = ky$, niin

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 500e^{kt},$$

jolloin

$$\begin{aligned} y(24) = 800 = 500^{24k}&, \text{josta saadaan ratkaistua } k \\ 24k \cdot \log(500) = \log(800)& \\ k = \frac{1}{24} \log \frac{8}{5}&, \end{aligned}$$

joten

$$y(t) = 500e^{\frac{t}{24} ln \frac{5}{8}} = 312.5 \cdot e^{\frac{t}{24}}$$

Halutaan saada selville $y(48)$ eli

$$y(48) = 312.5 \cdot e^{\frac{48}{24}} \approx 2309.$$

Soluviljelmän solujen määrä 48 tunnin jälkeen on siis 2309.

Esimerkki 2. Radium Ra^{228} on yksi väliydin pitkäaktiivisen Toriumin Th^{232} hajoamisketjussa. Radiumin puoliintumisaika on 5.75 vuotta sen hajotessa lyhytaktiiviseksi Aktinium Ac^{228}-ytimeksi. Kuinka paljon Radiumia on jäljellä 70 vuoden kuluttua, jos sen määrä on nyt 100kg?

Olkoon $y(t)$ Radiumin prosentuaalinen määrä ajanhetken t kuluttua.

Tällöin $y(0) = 100$ ja $k = 5.75$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)e^{kt} = 100e^{kt} \\ y(5,75) &= 50 = 100e^{5,75k}, \end{aligned}$$

josta saadaan ratkaistua k

$$\begin{aligned} e^{5,75k} &= \frac{50}{100} \\ 5,75k &= \ln \frac{1}{2} \\ k &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{5,75} = -\frac{2}{5,75} \end{aligned}$$

Nyt saadaan ratkaistua $y(70)$

$$y(70) = 100e^{-\frac{\ln 2}{5{,}75}\cdot 70} \approx 0.02164$$

70 vuoden kuluttua Radiumia on jäljellä siis 2.164% eli $2.2kg$.

Koron korko

Olkoon $A(t)$ pääoman määrä, joka noudattaa pääoman kasvaessa ajalla t kaavaa

$$A'(t) = aA(t) \Rightarrow A(t) = A(0)e^{at},$$

jossa $a = \frac{p}{100t_2}$, p on jatkuva korkoprosentti ja t_2 korkoprosentin aika.

Esimerkki 3. Tilille talletetaan 2000 euroa viideksi vuodeksi. Tilin veroton korko on 2%/vuosi ja tilin korko liitetään pääomaan aina vuoden kuluttua. Paljonko pääoma kasvaa?

Nyt $A(0) = 2000$, $t = 5$ ja $a = \frac{2}{100} = 0.02$

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0)e^{at} \\ A(5) &= 2000 \cdot e^{0.02\cdot 5} \approx 2210 \end{aligned}$$

Pääoma kasvaa siis viiden vuoden aikana $2210 - 2000 = 210$ euroa.

Logistinen kasvumalli

Logistinen kasvumalli kuvaa suureen, esimerkiksi väkiluvun tai populaation kasvua ajan t funktiona. Logistista kasvua kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - \frac{y}{L}),$$

jossa L on tarkasteltavan mallin määrän eli esimerkiksi väkiluku tai populaatio, ja k suhdeluku.

Yleiseksi ratkaisuksi alkuarvolla $y(0) = y_0$ saadaan

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}.$$

Putoava esine

Newtonin painovoimalain mukaan

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

jossa $y(t)$ on esineen korkeus ajanhetkellä t ja $g = 9.81\frac{m}{s^2}$.

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0,$$

jossa v_0 on alkunopeus.

Nopeus ja kiihtyvyys

Kappaleen nopeus ajanhetkellä t on

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t),$$

jossa x on kappaleen paikka ajanhetkellä t.

Kiihtyvyys kuvaa kappaleen nopeuden muutosta. Kiihtyvyyden arvo ajanhetkellä t on

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

jossa x on kappaleen paikka ajanhetkellä t.

Harmoninen liike

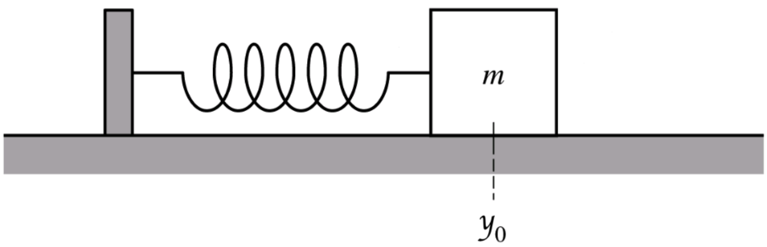
Harmonisessa liikkeessä voima on suoraan verrannollinen etäisyyteen lähtöpaikasta y_0.

$$\frac{d^2y}{dt^t} + \psi^2 y = 0,$$

jossa $\psi^2 = \frac{k}{m}$, m on kappaleen massa ja k jousivakio.

Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 \cos \psi t + C_2 \sin \psi t, \text{jossa} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



Kuva 6.1: Harmoninen systeemi, jossa kappaleen massa on m ja lähtöpaikka y_0 [5]

Schrödingerin yhtälö

Schrödingerin yhtälö on lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö, joka kuvaa hiukkasen käyttäytymistä kvanttimekaniikassa.

Aikariippumaton Schrödingerin yhtälö on muotoa

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

jossa $\psi(x)$ on aaltofunktio, $\hbar$ redusoitu Plancin vakio, E systeemin kokonaisenergia sekä $V(x)$ systeemin potentiaalienergia.

Schrödingerin yhtälö on samalla ominaisarvoyhtälö kun se kirjoitetaan mutoon

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

jossa ψ on operaattoin $\hat{H}$ ominaisfunktio ja E operaattorin ominaisarvo.

Hamiltonin operaattori eli systeemin kokonaisenergiaoperaattori $\hat{H}$ kuvaa systeemin kokonaisenergiaa $(x, y, x)-$koordinaatistossa

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V,$$

jossa ∇^2 on Laplace operaattori $(x, y, x)-$koordinaatistossa.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

jolloin Schrodingerin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

Yhtälö voidaan ratkaista separoimalla.

Entropia

Entropia kuvaa epäjärjestyksen määrää systeemissä. Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan eristetyn systeemin tila etenee kohti suurinta todennäköisyyttä eli suuntaan jossa entropia kasvaa.

Systeemin entropian muutos on

$$dS = \frac{dQ}{T}$$
$$\Delta S = \int_b^a \frac{dQ}{T},$$

jossa Q on lämpömäärä ja T lämpötila sekä a ja b systeemin tarkasteltavat tilat.

Termodynamikkan ensimmäisen pääsäännön mukaan energia ei voi hävitä, se vain muuttaa muotoaan.

$$dU = \partial Q - \partial W = TdS - pdV + \mu dN,$$

jossa U on systeemin sisäenergia, Q lämpömäärä ja W vaadittava työ.

Ensimmäisen pääsäännön yhtälöstä saadaan muodostettua relaatiot

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = T$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -p$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = \mu,$$

josta saadaan yhtälö

$$U = S\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} + V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} + N\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}.$$

Sijoitetaan osittaisderivaattojen tilalle suureet

$$U = TS - pV + \mu N,$$

josta saadaan ratkaistua myös entropia

$$S = \frac{1}{T}(U + pV - \mu N).$$

[3]

Luku 7

Differentiaaliyhtälöt lukio-opetuksessa

1960-luvun loppupuolella differentiaaliyhtälöt tulivat osaksi lukio-opetusta ja differentiaaliyhtälöitä käsitteleviä tehtäviä alkoi sen jälkeen myös esiintyä ylioppilaskokeissa. Vuoden 1967 kevään ylioppilaskokeessa oli differentiaaliyhtälöitä käsittelevä tehtävä (tehtävä 11), joka pyysi määrittämään differentiaaliyhtälön $y'' + y' = x$ yleisen ratkaisun ja piirtämään integraalikäyrän, joka sivuaa x-akselia origossa. 1960-luvulla lukion oppikirjoissa ei vielä ollut differentiaaliyhtälöitä, mutta koulut järjestivät erikoiskursseja aiheesta opiskelun tueksi. [6] Differentiaaliyhtälöt poistuivat opetussuunnitelmasta vuonna 2003 uuden opetussuunnitelman mukana, mutta niistä järjestetään edelleen soveltavia kursseja monessa lukiossa ympäri Suomea. Soveltavat kurssit ovat aina koulukohtaisia, mutta kerätyn aineiston perusteella kurssien tavoitteet ja aiheet olivat hyvin samankaltaisia.

Esimerkiksi Helsingin matematiikkalukiossa sekä Maunulan yhteiskoulussa differentiaaliyhtälöitä käsittelevä kurssi järjestetään joka toinen vuosi ja on toisen luokan opiskelijoille sekä abiturienteille yhteinen. Esitiedoksi vaaditaan differentiaali- ja integraalilaskennan kurssit (MAA6 Derivaatta ja MAA9 Integraalilaskenta). Kurssin sisältö vaihtelee toteutuskerrasta riippuen, mutta pääosin se noudattaa vanhan valtakunnallisen syventävän kurssin sisältöä. Kurssin sisältöön kuuluvat separoituvat ja lineaariset differentiaaliyhtälöt, toisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ja numeeritsen ratkaisujen läpikäynti esimerkinomaisesti. Kurssilla on myös käyty läpi muiden aineiden soveltavia esimerkkejä, kuten konsentraation muutos reaktiossa, Lotkan-Volterran-yhtälö ja Tsiolkovskin laki. [2]

Oppimateriaalina on toiminut opettajien itse koostamat materiaalit, vanhat lukion differentiaaliyhtälö-kurssin kirjat ja esimerkiksi "Matemaattista fysiikka lukiolaisille 1-moniste on toiminut myös oppimateriaalina. [1]

Lukion differentiaaliyhtälöt-kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- perehtyy differentiaaliyhtälön käsitteeseen
- oppii muodostamaan ja ratkaisemaan yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä
- näkee yhteydet matematiikan ja muiden luonnontieteiden välillä
- tutustuu kahden muuttujan funktioihin ja niiden differentiaalilaskentaan

Keskeisiä sisältöjä

- ensimmäisen kertaluvun separoituvat yhtälöt
- ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt
- toisen kertaluvun vakiokertoimiset lineaariset yhtälöt
- kahden muuttujan funktion kuvaajat ja ääriarvot

Differentiaaliyhtälöt-kurssin pääpaino on ratkaisujen löytämisessä ja tästä johtopäätösten tekmisessä, ei teoriassa. Tämän vuoksi tehtävät ovat useimmiten soveltavia. On myös tärkeä saada yhdistettyä differentiaaliyhtälöidet ja niiden käyttö johonkin konkreettiseen käyttötarkoitukseen, kuten esimerkiksi luonnontieteisiin. Tämänkaltaiset tehtävät auttavat oppilaita soveltamaan oppimaansa muille tieteenaloille.

Kirjallisuus

[1] Jorma Merikoski Markku Halmetoja. ”Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1”. *Matematiikkalehti Solmu* (). DOI: `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2009/mfl.pdf`.

[2] *Matematiikkalehti solmu*. URL: `https://matematiikkalehtisolmu.fi`.

[3] Julio de Paula Peter Atkins. *Physical Chemistry*. W. H. Freeman ja Company, 2014.

[4] Juhani Pitkäranta. *Calculus Fennicus – TKK:n 1. lukuvuoden laaja matematiikka (2000–2013)*. Avoimet oppimateriaalit ry, 2015.

[5] Christopher Essex Robert Adams. *Calculus: A complete curse*. Pearson Education Canada, 2009.

[6] *Suomen matemaattinen yhdistys*. URL: `http://www.http://matemaattinenyhdistys.fi`.

[7] Richard C. DiPrima Willian E. Boyce. *Elementary Differential Equations*. Wiley, 2012.

[8] Dennis G. Zill. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Brooks/Cole, 2013.